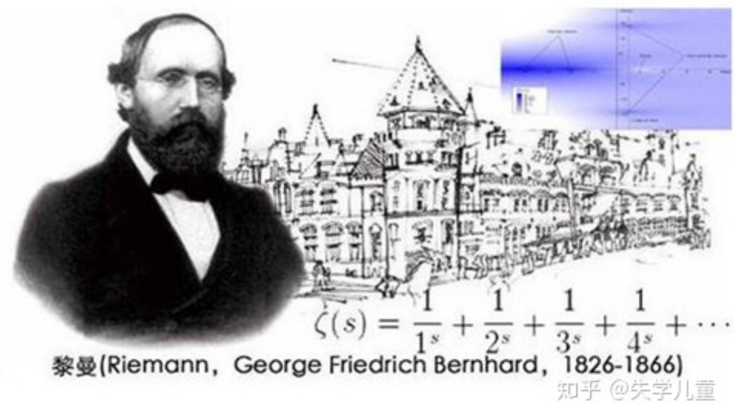
韦依猜想

宇帆
华东师范大学 基础数学硕士

目录：



Zeta函数

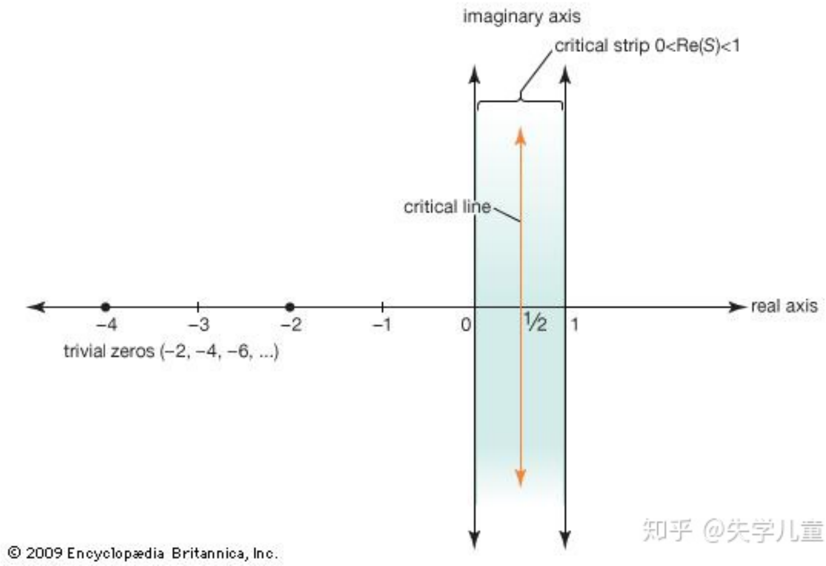
一：Zeta函数——故事的小黄花

> 定义：黎曼Zeta函数 ζ 是定义在 $\Re(s) > 1$ 上的全纯函数：
> $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$

它具有如下基本性质：

1. $\zeta(s)$ 可解析延拓为整个复平面上的亚纯函数，它仅在 $s = 1$ 处有单极点.
2. **（函数方程）**考虑 $\zeta(s)$ 的完备 $\hat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ ，这里 Γ 为Gamma函数。则 $\hat{\zeta}(s)$ 满足函数方程 $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$.
3. 每个负偶数都是 $\zeta(s)$ 的零点，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的**平凡零点**.
4. **（黎曼假设） $\zeta(s)$ 的非平凡零点全在直线 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ 上！**
5. 对 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\Re(s) > 1$ ，由整数环的素数因子分解唯一性和几何级数公式可得Euler积公式：

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{\mathfrak{m}:\text{极大理想}} (1 - (|\mathbb{Z}/\mathfrak{m}|^{-s}))^{-1} = \prod_{P:Spec\mathbb{Z}\text{的闭点}} (1 - |\kappa(P)|^{-s})^{-1}.$$



数学的圣杯：Riemann假设

Dedekind Zeta函数

> 定义：设 K 是数域，定义数域 K 的Dedekind ζ 为
> $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$
> 这里 $\mathfrak{a}$ 取遍 $\mathcal{O}_K$ 的非零理想， $\mathfrak{p}$ 取遍 $\mathcal{O}_K$ 的极大理想（非零的素理想）， $N(\mathfrak{a}) := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$.

Hecke给出了 $\zeta_K(s)$ 在整个复平面的解析延拓，延拓后的亚纯函数 $\zeta_K(s)$ 仅在 $s=1$ 处有单极点。类似地，我们也有函数方程和黎曼假设.

概形的Zeta函数

> 定义：设 X 是一个有限型概形over $\mathbb{Z}$ ，定义 X 的Zeta函数为
> $\zeta_X(s) = \prod_{P:X\text{ 的闭点}} \frac{1}{1 - N(P)^{-s}},$
> 这里 $N(P) = |\kappa(P)|$ 表示 X 在点 P 处的剩余类域 $\kappa(P)$ 中的元素个数.

注意到 $\zeta(s) = \zeta_{Spec\mathbb{Z}}(s)$ 和 $\zeta_K(s) = \zeta_{Spec\mathcal{O}_K}(s)$.

> 定义：设 X 是一个有限型概形over $\mathbb{F}_q$ ，以 N_n 记 $|X(\mathbb{F}_{q^n})|$ ，定义
> $Z_X(T) := \exp\left(\sum_{n\geq 1} N_n \frac{T^n}{n}\right) = 1 + \sum_{n\geq 1} N_n \frac{T^n}{n} + \frac{1}{2!}(\sum_{n\geq 1} N_n \frac{T^n}{n})^2 + \cdots \in \mathbb{Q}[[T]].$
> 等价地： $Z_X(T)$ 是一个满足如下方程的幂级数 $\in \mathbb{Q}[[T]]$
> $Z_X(0) = 1, \qquad \frac{d\log Z_X(T)}{dT} = \sum_{n\geq 1} N_n T^{n-1}.$

上述两个定义有如下关系：

> **命题**：设 X 是一个有限型概形over $\mathbb{F}_q$ ，则 X 也是一个有限型概形over $\mathbb{Z}$，且我们有
> $\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s}).$
> 由于这个关系，我们也把 $Z_X(T)$ 称为 X 的**Zeta函数**.

证明：*事实上，我们可以通过如下态射把* X *看成over* $\mathbb{Z}$ *上的概形*：
$X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_q \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ ，
其中第二个态射由环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{F}_q$ *诱导.*
设 x *是* X *的闭点，记* $\deg x := [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$ ，*我们将证明* $Z_X(T) = \prod_x \frac{1}{1 - T^{\deg x}}$ ，*这里* x *取遍* X *的所有闭点. 我们知道* $X(\mathbb{F}_{q^n})$ *的每个点是一个态射* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_{q^n} \to X$ ，*假设这个态射的像是* x ，*则它对应一个* $\mathbb{F}_q$ *-同态* $\kappa(x) \to \mathbb{F}_{q^n}$ *. 记* $N_n(x)$ *为所有不同* $\mathbb{F}_q$ *-同态* $\kappa(x) \to \mathbb{F}_{q^n}$ *的个数.*
则由有限域的Galois理论可知

$$N_n(x) = \begin{cases} \deg x & \text{若 } \deg x | n \\ 0 & \text{其他情形.} \end{cases}$$

另一方面，回顾 $\log(\frac{1}{1-s}) = \sum_{n\geq 1} \frac{s^n}{n}$ ，*故*
$$\log \frac{1}{1 - T^{\deg x}} = \sum_{n \geq 1} \frac{T^{n \cdot \deg x}}{n}.$$
注意到
$$\log \frac{1}{1 - T^{\deg x}} = \sum_{n \geq 1} \frac{T^{n \cdot \deg x}}{n} = \sum_n N_n(x) \frac{T^n}{n}$$
接着两边取遍 X *的闭点和取指数* $\exp$ *可得*
$$Z_X(T) = \prod_x \frac{1}{1 - T^{\deg x}}.$$
又注意到 $q^{\deg x} = N(x)$ ，*故* $\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s})$.

举个栗子，取 $X = \mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q}$ ，则直接计算可得
$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = 1 + q^n + q^{2n} + \cdots q^{dn},$$
$$Z_X(T) = \frac{1}{(1-T)(1-qT)\cdots(1-q^dT)}.$$

韦依猜想

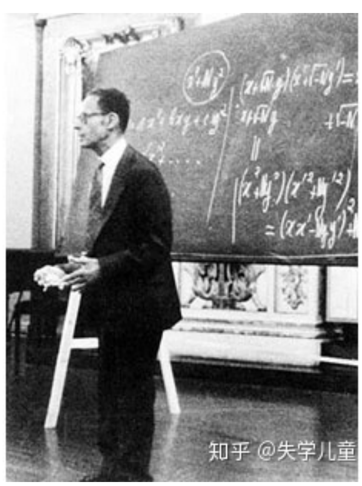
二：韦依猜想

> 韦依猜想的惊人之处在于，它给出了代数几何与拓扑之间的联系，它隐含着的洞察力所激发的巨大期望就是拓扑空间的上同调方法可以适用于簇与概形。这个期望在很大程度上由Grothendieck及其合作者的工作实现了。

1949年，由于受到黎曼关于Zeta函数的工作的启发，韦依研究了定义于有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的代数簇 X 的Zeta函数 $Z_X(T)$ 和 $\zeta_X(s)$ ，以计算 X 在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 域上的有理点的个数 $|X(\mathbb{F}_{q^n})|$ 。在曲线和阿贝尔簇两种情况下，韦依证明了 $Z_X(T)$ 满足性质：

1. $Z_X(T)$ 是有理函数.
2. 满足函数方程.
3. 零点有某种特定的形式. 这是经典黎曼假设的类比.

韦依猜想是问，对于一般射影非奇异代数簇上的Zeta函数，这些性质是否还成立. 这些猜想揭示了**有限域上定义的代数簇的算术和复代数簇的拓扑之间的一个深刻联系。**

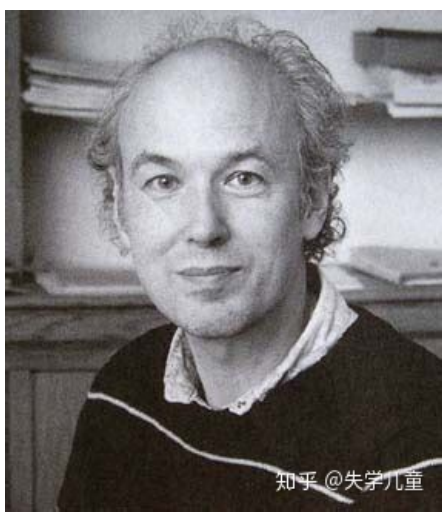


韦依

韦依猜想为何重要?

我心目中的**英雄，证明黎曼假设的男人**——Pierre Deligne是这样说的：

> There were some previous theorems of Weil about curves in the one-dimensional situation. There are many analogies between algebraic curves over finite fields and the rational numbers. Over the rational numbers, the central question is the Riemann hypothesis. Weil had proved the analogue of the Riemann hypothesis for curves over finite fields, and he had looked at some higher-dimensional situations as well. This was at the time where one started to understand the cohomology of simple algebraic varieties, like the Grassmannians. He saw that some point-counting for objects over finite fields reflected what happened over the complex numbers and the shape of the related space over the complex numbers.
>
> As Weil looked at it, there are two stories hidden in the Weil conjectures. First, why should there be a relation between apparently combinatorial questions and geometric questions over the complex numbers. Second, what is the analogue of the Riemann hypothesis? Two kinds of applications came out of these analogies. The first started with Weil himself: estimates for some arithmetical functions. For me, they are not the most important. Grothendieck's construction of a formalism explaining why there should be a relation between the story over the complex numbers, where one can use topology, and the combinatorial story, is more important.
>
> Secondly, algebraic varieties over finite fields admit a canonical endomorphism, the Frobenius. It can be viewed as a symmetry, and this symmetry makes the whole situation very rigid. Then one can transpose this information back into the geometric world over the complex numbers, it yields constraints on what will happen in classical algebraic geometry, and this is used in applications to representation theory and the theory of automorphic forms. It was not obvious at first that there would be such applications, but for me they are the reason why the Weil conjecture is important.



证明黎曼假设的男人——Pierre Deligne

韦依猜想的陈述

设 $\overline{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包， $\overline{\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$ 在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的整闭包.
（韦依猜想）设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 d 维光滑射影簇，则

1. **（有理性）**Zeta函数 $Z_X(T)$ 是一个有理函数，即 $Z_X(T)\in\mathbb{Q}(T)$. 更精确地， $Z_X(T)$ 可写成如下有限交错积的形式： $Z_X(T)=\prod_{i=0}^{2d}P_i(T)^{(-1)^{i+1}}=\dfrac{P_1(T)P_3(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T)\cdots P_{2d}(T)}$，其中 $P_0(T)=1-T$ 和 $P_{2d}(T)=1-q^dT$ ，而对于 $1\le i\le 2d-1$ ， $P_i(T)\in 1+T\mathbb{Z}[T]$ 是整系数多项式，并且 $P_i(T)$ 在 $\mathbb{C}[T]$ 中可分解为 $\prod_{j=1}^{b_i}(1-\alpha_{ij}T)$ ， $\alpha_{ij}\in\overline{\mathbb{Z}}$.
2. **（函数方程和庞加莱对偶）**Zeta函数 $Z_X(T)$ 满足如下函数方程：
$Z_X(\frac{1}{q^dT})=\varepsilon q^{d\chi/2}T^{\chi}Z_X(T)$，其中 $\varepsilon=\pm1$ 和 χ 是 X 的欧拉示性数. 等价地，如果令 $\hat{Z}_X(T):=Z_X(T)T^{\chi/2}$ 和 $\hat{\zeta}_X(s)=\hat{Z}_X(q^{-s})$ ，则 $\hat{Z}_X(\frac{1}{q^dT})=\varepsilon\hat{Z}_X(T)$ 和 $\varepsilon\hat{\zeta}(s)=\hat{\zeta}(d-s)$.
3. **（黎曼假设）**对所有的 i,j 有 $|\alpha_{ij}|=q^{i/2}$.
4. **（Betti数）**若 X 是定义于某代数整数环 $R\subset\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇 Y 的“模 p 约化”，则对 $i=0,\cdots,2d$ ， $P_i(T)$ 的次数 b_i 为 $Y(\mathbb{C})$ 的Betti数.

注记：黎曼假设（3）是说 $\zeta_X(s)$ 的极点在直线 $\Re(s)=0,1,2,\cdots,d$ 上，零点在直线 $\Re(s)=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\cdots,\frac{2d-1}{2}$ 上. *特别地，设 X 是一条光滑的代数曲线，则 $\zeta_X(s)=Z_X(q^{-s})$ 的零点满足 $\Re(s)=\frac{1}{2}$. 这就是称（3）是“黎曼假设”的原因.*

假设韦依猜想成立，我们将可以计算 X 在 $\mathbb{F}_{q^n}$ 域上的有理点的个数 $|X(\mathbb{F}_{q^n})|$:
（推论）设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 d 维光滑射影簇，则

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})|=\sum_{j=1}^{b_0}\alpha_{0j}^n-\sum_{j=1}^{b_1}\alpha_{1j}^n+\sum_{j=1}^{b_2}\alpha_{2j}^n-\cdots+\sum_{j=1}^{b_{2d}}\alpha_{2d,j}^n,$$

其中

- $b_0=1,\ b_{2d}=1,\ \alpha_{01}=1,\ \alpha_{2d,1}=q^d.$
- 对 $i=0,\cdots,2d$ ， $b_i\in\mathbb{N}$ 满足 $b_{2d-i}=b_i$.事实上，这里的 b_i 是 ℓ -进上同调群的Betti数.
- 对任意的 i,j 有 $\alpha_{ij}\in\overline{\mathbb{Z}}$ 满足 $\alpha_{2d-i,j}=q^d/\alpha_{i,j}$.
- **（黎曼假设）**对所有的 i,j 有 $|\alpha_{ij}|=q^{i/2}$.

例1：考虑 d -维射影空间 $X=\mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_q}$.
直接计算可得

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})|=1+q^n+q^{2n}+\cdots q^{dn}$$

$$Z_X(T)=\frac{1}{(1-T)(1-qT)\cdots(1-q^dT)}$$

$$\zeta_X(s)=Z_X(q^{-s})=\frac{1}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})\cdots(1-q^{d-s})}$$

$\chi = d+1, \qquad \varepsilon = (-1)^d$

$$Z_X(\frac{1}{q^dT}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{q^dT})(1-\frac{1}{q^{d-1}T})\cdots(1-\frac{1}{T})} = (-1)^d q^{d(d+1)/2} T^{d+1} Z_X(T)$$

例2：考虑有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的亏格为 g 的曲线 X .

由Riemann-Roch定理可知

$$Z_X(T) = \frac{P(T)}{(1-T)(1-qT)}$$

其中

$P(T) = 1 + c_1T + \cdots + c_{2g}T^{2g} \in \mathbb{Z}[T]$.

更近一步， $Z_X(T)$ 满足函数方程

$$Z_X(\frac{1}{qT}) = q^{1-g} \cdot T^{2-2g} \cdot Z_X(T).$$

设 $P(T) = \prod_{i=1}^{2g}(1-\lambda_i T)$ ，可以证明 X 的 ℓ -进Betti数为

$b_0 = 1, \qquad b_1 = 2g, \qquad b_2 = 1.$

韦依猜想告诉我们 $|\lambda_j| = q^{1/2}\ (j = 1,\cdots,2g)$ 和 $\lambda_{g+i} = q/\lambda_i$ （对 $i = 1,\cdots,g$ ），使得对所有 $n \geq 1$ 有

$$|X(\mathbb{F}_{q^n})| = 1 - (\lambda_1^n + \cdots + \lambda_{2g}^n) + q^n.$$

这推知（Hasse-Weil bound）

$$||X(\mathbb{F}_{q^n})| - q^n - 1| \leq 2g(q^n)^{1/2}.$$

算术 $\longleftrightarrow$ 拓扑

Frobenius

三：Frobenius自同态

设 R 是特征为素数 p 的交换环（例如整环的非零特征总是素数）. ***Frobenius自同态*** F_R 定义为
$F(a) = a^p, \qquad \forall a \in R$
直接验证可知这是一个环同态. 它具有如下基本性质：

1. 设 $\varphi : R \to S$ 是两个特征为素数 p 的交换环，则 $\varphi \circ F_R = F_S \circ \varphi$.
2. 如果环 R 没有幂零元，则 F_R 是单射. 特别地，若 R 是整环，则 F_R 是单射.
3. 即使 R 是一个域， F_R 也**不一定**是满射. 回顾一个域 k 称为*perfect*，如果 $\mathrm{Char}(k) = 0$ 或 $\mathrm{Char}(k) = p > 0$ 且 F_k 是一个自同构. 例如有限域都是perfect域.

有限域的“对称”

我们回顾有限域是长什么样子的

> 任意特征 $p>0$ 的有限域 k 都是 $\mathbb{F}_p:=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的有限扩张 $\mathbb{F}_q$ ，这里 $q=p^{[k:\mathbb{F}_p]}=|k|$. 它恰好是 X^q-X 的分裂域，是 $\mathbb{F}_p$ 的Galois扩张，并且在同构意义下是唯一确定的.

对任意的交换 $\mathbb{F}_q$ -代数，定义其***Frobenius自同态***
$Fr_q:A\to A,\qquad x\mapsto x^q.$
直接验证可知 Fr_q 确实是环同态. 又由于 $\forall x\in\mathbb{F}_q, x^q=x$ ，故 Fr_q 是 $\mathbb{F}_q$ -线性的. 对任意的交换 $\mathbb{F}_q$ -代数同态 $\varphi:A\to B$ ，我们也有 $\varphi\circ Fr_q(A)=Fr_q(B)\circ\varphi$.
现在我们回顾有限域的Galois理论：

> 设 E/F 是特征为 $p>0$ 的有限域的扩张，且 $|F|=q$. 则 E/F 是Galois扩张，群 $Gal(E/F)$ 是由 Fr_q 生成的 $n=[E:F]$ 阶循环群. 更近一步地，对每个 $d|n$ 都存在唯一的中间域 $E_d\simeq\mathbb{F}_{q^{n/d}}$ 使得 $[E:E_d]=d$ ，且 $d_1|d_2\iff E_{d_1}\supset E_{d_2}$.

概形的Frobenius自同态

设 p 是一个素数. 令 $q=p^n$ 和 $k=\mathbb{F}_q$. 考虑环同态
$\varphi:k[x_1,\cdots,x_n]\to k[x_1,\cdots,x_n],\ x_i=x_i^p,\ \forall i$
令 $F:\mathbb{A}_k^n\to\mathbb{A}_k^n$ 是相应 φ 的态射. 则

1. F^n 是集合之间的恒等映射，但不是概形之间的恒等态射.
2. F 是一个双射，但不是概形之间的同构.

> 定义：固定一个素数 $p>0$. 考虑over $\mathbb{F}_p$ 上的概形 X . 我们定义***绝对Frobenius态射*** 为一个自同态 $F_X:X\to X$ 使得对每个仿射开子集 $\operatorname{Spec}A\subset X$ ， F 对应环态射 $A\to A,\ a\mapsto a^p,\ \forall a\in A$.

绝对Frobenius态射有如下基本性质：

1. 设 $f:X\to Y$ 是两个over $\mathbb{F}_p$ 上的概形的态射. 则 $f\circ F_X=F_Y\circ f$.
2. 对任意 $x\in X$ 我们有 $F_X(x)=x$.

设 S 是一个over $\mathbb{F}_p$ 上的概形和 X 是一个 S -概形. 令 $X^{(p)}:=X\times_S S$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "F_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}
$$

其中 $F_{X/S}:X\to X^{(p)}$ 称为***相对Frobenius态射***.
可以证明图中 $F_{X/S}$ 和 α 都是同构.
让我们看看仿射的情形相对Frobenius态射在说什么：

> 设 $S=\operatorname{Spec}A$ 是over $\mathbb{F}_p$ 上的概形， $X=\operatorname{Spec}A[x_1,\cdots,x_n]/I$. 则
> $X^{(p)}=\operatorname{Spec}A[x_1,\cdots,x_n]/I^{(p)}$
> 其中 $I^{(p)}$ 是由形如 $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}^n}a_\nu^p x^\nu$ 满足 $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}^n}a_\nu x^\nu\in I$. 另外，相对Frobenius态射
> $F_{X/S}:X\to X^{(p)}$ 由 A -代数同态 $x_i\mapsto x_i^p$ 诱导，而 α 把系数映到 p 次幂，变量 x_i 不动.

设 X over $\mathbb{F}_q$ 上的代数簇，则

1. $X^{(p)}=X, F_X=F_{X/\mathbb{F}_q}$
2. 记 $\overline{F}_X:X_{\overline{\mathbb{F}}_q}\to X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 为 F_X 诱导的态射. 假设 $X=\operatorname{Spec}A[x_1,\cdots,x_n]/I$ ，把 $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 看成 $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}=\{(a_1,\cdots,a_n)\in\overline{\mathbb{F}}_q\mid P(a_1,\cdots,a_n)=0,\ \forall P\in I\}$ 则 $\overline{F}_X(a_1,\cdots,a_n)=(a_1^q,\cdots,a_n^q)$
3. 集合 $X(\mathbb{F}_q)$ 恰好是 $\overline{F}_X:X_{\overline{\mathbb{F}}_q}\to X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 的不动点集合. 这是因为：对于 $x\in\overline{\mathbb{F}}_q$ ，我们有 $x\in\mathbb{F}_q\iff x^q=x$
4. 同样地， $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 在 $\overline{F}_X$ 的 n 次迭代作用下 $\overline{F}_X^n:X_{\overline{\mathbb{F}}_q}\to X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 的不动点集合恰好是集合 $X(\mathbb{F}_{q^n})$.
5. $\overline{F}_X:X_{\overline{\mathbb{F}}_q}\to X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ 是次数为 $q^{\dim X}$ 的有限态射.

韦依猜想的上同调解释

四：韦依猜想的上同调解释

设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 d 维光滑射影簇，约定 $\bar{X}=X\times\bar{\mathbb{F}}_q$.
在1936年，Hasse发现可以把 **$X(\mathbb{F}_{q^n})$ 的计数问题转化成纯几何的问题**：

> 在射影簇 $\bar{X}$ 上，我们可以定义Frobenius自同态 $F_X,F_X^2,F_X^3,\cdots$. 射影簇 X 上 $\mathbb{F}_{q^n}$ -点集 $X(\mathbb{F}_{q^n})$ 恰好是自同态 $F_X^n:\bar{X}\to\bar{X}$ 的不动点集.

Lefschetz不动点定理

关于不动点集的计算，我们回顾经典的Lefschetz不动点定理：设 X 是一个紧微分实流形，$f:X\to X$ 是一个微分映射， f 的一个***不动点***是指一个点 $x\in X$ 使得 $f(x)=x$. 对于 X 的一个不动点 x ，微分 df_x 是切空间 T_xX 的一个线性变换. 称一个不动点 x 是***非退化的***（***nondegenerate***），如果 $1-df_x$ 是可逆的.（这个条件是说这个不动点具有“重数 1 ”）. 则Lefschetz不动点定理是说：如果 f 的所有不动点都是非退化的，则 f 的不动点个数

$$N=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\mathrm{Tr}(f^*|H^i(X,\mathbb{Q})).$$

韦依把不动点解释为 Δ 和图 Γ_f 的相交数：

所以我们**期望对于有限域上的 X 定义“正确”的上同调论，使得Lefschetz不动点定理的类比成立。**

韦依上同调

这种“正确的”上同调就是韦依上同调：
给定域 k （任意特征）和 K （特征为 0 ），记 k 上光滑射影簇的范畴 $\mathcal{V}(k)$ ，分次 K 代数的范畴为 $GrVect(K)$. 定义韦依上同调函子为反变函子 $H^*:\mathcal{V}(k)\to GrVect(K)$ ，对所有 d 维射影簇 X ，满足如下公理：

1. （**有限公理**） $H^i(X)$ 都是有限维 K -线性空间；
2. （**消没公理**） $H^i(X)=0$ ，除非 $0\leq i\leq 2d$ ；
3. （**定向公理**） $H^{2d}(X)=K$ ；
4. （**庞加莱对偶**）存在非退化配对 $H^i(X)\otimes H^{2d-i}(X)\to H^{2d}(X)=K$ ；
5. （**Kunneth公式**）有典范同构 $H^*(X)\otimes H^*(Y)\to H^*(X\times Y)$ ； 上述5条公理是一般上同调论的共性，我们希望韦依上同调还能给出代数几何特有的
6. （**闭链映射**）记 $C^i_{rat}(X)$ 为 X 中余维数为 i 的代数闭链的有理等价类所张成的 K -线性空间. 要求存在闭链映射 $cl_X:C^i_{rat}(X)\to H^{2i}(X)$ 满足函子性，与Kunneth公式相容，并在 X 退化为单点时给出嵌入 $\mathbb{Q}\hookrightarrow K$.
7. （**弱Lefschetz定理**）

8. （强Lefschetz定理）

4种经典的韦依上同调

设 X 是一个域 k 上的光滑射影簇. 令 $\bar{X}=X\times k^{sep}$ ，这里 k^{sep} 是 k 的可分闭包.

1. （Betti（奇异）上同调）如果存在嵌入 $k\hookrightarrow\mathbb{C}$ ，则定义 X 的**Betti（奇异）上同调**为 $H^i_B(X,\mathbb{Q}):=H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$
2. （代数德拉姆上同调）如果 $Char(k)=0$ ，则定义 X 的**德拉姆上同调**为 $H^i_{dR}(X,k):=\mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{X/k})$
3. （l-进平展上同调）与Betti上同调构成提升/约化的关系.
4. （晶体上同调）代数德拉姆上同调的“模 p 约化”，以Witt向量为系数.

它们之间有如下关系：

- 奇异上同调与德拉姆上同调 $H^i_B(X,\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\simeq H^i_{dR}(X,k)\otimes_k\mathbb{C}$.
- 奇异上同调与平展上同调 $H^i_B(X,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}_\ell\simeq H^i_{et}(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)$.

Lefschetz不动点定理

事实上，Lefschetz不动点定理的成立仅仅依赖于韦依上同调公理（1）-（6）.
设 $H^*:\mathcal{V}(k)\to GrVect(K)$ 是一个韦依上同调， $X\in\mathcal{V}(k)$.
则我们有

> （**Lefschetz不动点定理**）设 $f:X\to X$ 是一个自同态. 则不动点的个数为
> $N=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\mathrm{Tr}(f^*|H^i(X)).$

韦依猜想中“有理性”，“函数方程”和“Betti数”的证明

假设存在一个韦依上同调 $H^*:\mathcal{V}(\mathbb{F}_q)\to GrVect(K)$. 我们将证明韦依猜想中“有理性”和“函数方程”.设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 d 维光滑射影簇，约定 $\bar{X}=X\times\bar{\mathbb{F}}_q$.

引理：设 α 是有限维线性空间 V 的自同态，则

$$\log(\det(1-\alpha T|V)) = -\sum_{n\geq 1}\mathrm{Tr}(\alpha^n|V)\frac{T^n}{n}.$$

引理：设 K 是一个特征为 0 的域. 设 $f(T)=\sum_{i\geq 0}a_iT^i\in K[[T]]$ ，则 $f(T)\in K[T]$ 当且仅当存在整数 m 和 n_0 使得对所有 $n\geq n_0$ Hankel行列式

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+m} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & \cdots & a_{n+m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+m-1} & a_{n+m} & \cdots & a_{n+2m-2} \end{vmatrix}$$

为 0 .

> **（有理性）**Zeta函数 $Z_X(T)\in\mathbb{Q}(T)$. 更精确地， $Z_X(T)$ 可写成如下有限交错积的形式：
> $Z_X(T)=\prod_{i=0}^{2d}P_i(T)^{(-1)^{i+1}}=\frac{P_1(T)P_3(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T)\cdots P_{2d}(T)}$, 其中 $P_0(T)=1-T$ 和
> $P_{2d}(T)=1-q^dT$ ，而对于 $1\leq i\leq 2d-1$ ， $P_i(T)=\det(1-F_X^*T|H^i(X))\in 1+T\mathbb{Z}[T]$ 是整系数多项式.

证明：*由定义知*

$$\log Z_X(T)=\sum_{n\geq 1}N_n\frac{T^n}{n} \ .$$

因为 F_X^n *的不动点的重数都是* 1 ，*所以由Lefschetz不动点定理可知*

$$N_n=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\mathrm{Tr}((F_X^n)^*|H^i(X))$$

则命题可由上述两个引理给出.

> **（函数方程和庞加莱对偶）**Zeta函数 $Z_X(T)$ 满足如下函数方程：
> $Z_X(\frac{1}{q^dT})=\varepsilon q^{d\chi/2}T^\chi Z_X(T)$, 其中 $\varepsilon=\pm 1$ 和 χ 是 X 的欧拉示性数.

证明：*因为Frobenius自同态* F_X *的次数为* q^d *. 所以对* X *的每个闭点* P *有* $F_X^*P=q^dP$ *和*

$$F_X^*cl_X(P)=cl_X(F_X^*P)=cl_X(q^dP)=q^dcl_X(P).$$

这可由庞加莱对偶定理推知.

总结一下，我们现在的目标是：

- 在特征为 p 的域上构造一个韦依上同调理论，要求满足（1）-（6），这样我们就能证明“有

理性”，“函数方程”和“Betti数”了！
- 它还能满足（7）和（8），寻求更深入的理论，以求证明黎曼假设！

在1960年，Grothendieck定义出系数为 ℓ -进域 $\mathbb{Q}_\ell$ 的平展上同调，还定义出了晶体上同调，并证明这种上同调满足韦依上同调的要求。这样，Grothendieck就证明了韦依猜想的前两部分。对于韦依猜想的第三部分——黎曼假设，Grothendieck并没有试图直接去证明，而是转向了更为宽阔的视野。首先，Grothendieck提出了Motive理论，然后，在此基础上形成了他著名的“标准猜想”。这样，如果能够证明“标准猜想”，那么“人们就可以通过用簇的Motive理论替代曲线的雅克比，来将韦依关于曲线情形的韦依猜想的证明扩展到任意维的代数簇的情形”，即可推出黎曼假设。

碧海潮生

五：平展上同调——碧海潮生

构造韦依上同调并不容易。我们来看Serre的一个例子：
考虑椭圆曲线 C 的自同态环 $End(C)$ ， $End(C)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 在 2 维线性空间 $H^1(C)$ 上有一个自然的作用。对于定义在 $\mathbb{F}_{p^2}$ 上的超奇异椭圆曲线 C ， $End(C)\times\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的可除四元数代数，因而在 $\mathbb{R}$ 上和 $\mathbb{Q}_p$ 上（从而在 $\mathbb{Q}$ 上）不存在 2 维表示。也就是说，**韦依上同调的系数必须要在 $\mathbb{Q}_\ell,\ell\neq p$ 中寻找.**

平展拓扑

回顾概形上的平展拓扑：

> 定义：设 X 是一个概形. 以 Et/X 记对象为平展态射 $U \to X$ ，态射为 X -态射 $U \to V$（一定是平展态射）的范畴；一个平展覆盖是指一族 X -态射 $(f_i : U_i \to U)_{i \in I}$ 满足 $U = \bigcup_{i \in I} f(U_i)$. 这定义了一个Grothendieck拓扑，称为 X 的（**small**）**etale site**，记为 X_{et} .

ℓ -进上同调论

回到有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的射影簇 X ，一个自然的想法是 $H^i(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)(\ell \neq p)$ 能否给出韦依上同调——这被证明是一个失败的尝试。另一方面，Grothendieck与其合作者成功地构造了所谓的 ℓ -进上同调论：

> 定义：设 X 是一个概形， ℓ 是素数且 $\ell \neq p$. 对每个 $i \in \mathbb{N}$ ，定义
> $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim_n H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$
> 以及定义
> $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) := H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$
> 称之为 X 的 ℓ -进上同调群.

可以证明这样一个以 $\mathbb{Q}_\ell$ 为系数的 **ℓ -进上同调 $H^*(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 是一个韦依上同调**. 我们必须指出， ℓ -进上同调的构造以及韦依上同调的（1）-（8）的验证绝不是简单的.

六：Motive——Grothendieck的梦想

> 在所有我有幸发现并呈献给世人的数学事物中，Motive的实在性对我来说依然是最奇妙、最充满神秘的——它甚至是"几何"与"算术"在深层次上的同一所在。而Motive的哲学……或许是我作为一个数学家的人生前半期所发现的最强有力的探索工具。
> ——Grothendieck

为什么不存在代数的 $\mathbb{Q}$ -系数上同调?

我们已经看到，随着素数 ℓ 的变动，会给出性质完全不同的域 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的上同调，这样我们就有太多的上同调理论。人们自然会问，是否能类比于代数拓扑中的 $\mathbb{Q}$ -系数上同调，以诱导出所有的 ℓ -进上同调呢？答案是否定的。那为什么没有 $\mathbb{Q}$ -系数上同调（即从光滑射影簇范畴到分次 $\mathbb{Q}$ 代数范畴的反变函子）以诱导出所有的不同 ℓ -进上同调呢？

1. **第一种解释（适用于非零特征的 k ）**： 设 E 是域 k 上的椭圆曲线，则 $End(E)_\mathbb{Q} := End(E)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ 可能是 $\mathbb{Q}$ 上的 4 次可除代数. 这种可除代数能作用于其上的最小的 $\mathbb{Q}$ -线性空间是 4 维的. 因此不存在 $\mathbb{Q}$ -线性空间 $H^1(E,\mathbb{Q})$ 使得 $H^1(E,\mathbb{Q}_\ell)\simeq H^1(E,\mathbb{Q})\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{Q}_\ell$ （作为 $End(E)_\mathbb{Q}$ -模）
2. **第二种解释（适用于任意特征的 k ）**： 设 X 是特征 0 的代数闭域 k 上的非奇异射影簇. 当我们取定一个嵌入 $k\hookrightarrow\mathbb{C}$ ，我们即得到一个复流形 $X(\mathbb{C})$ ，熟知 $H^i_{et}(X,\mathbb{Q}_\ell)\simeq H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}_\ell$ 换句话说，每个嵌入 $k\hookrightarrow\mathbb{C}$ 确实在各个上同调群上定义一个 $\mathbb{Q}$ -结构. 然而，不同的嵌入可以给出完全不同的 $\mathbb{Q}$ -结构.

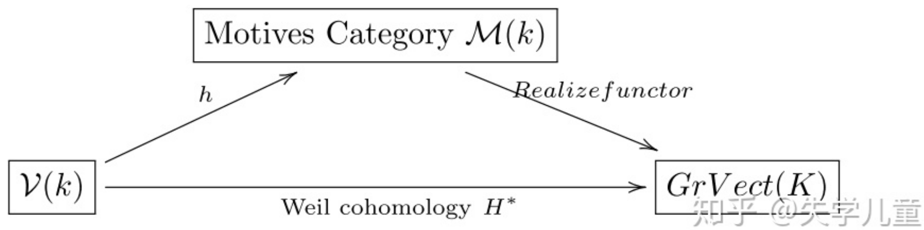
因此这样的 $\mathbb{Q}$ -系数上同调并不存在. 可是，尽管 $\mathbb{Q}_\ell$ 是完全不同的世界，它们却有着明显构造上的类似. 对于不同的 ℓ 所产生的定理，形式上是完全一样的. 所以，应该存在一种不依赖 ℓ 的东东. 正如Milne所说，既然不存在一种 $\mathbb{Q}$ -系数上同调论以诱导出Grothendieck所定义的所有这些不同的上同调理论，但是我们又如何阐释种种迹象都显示其似乎存在的这一事实呢? Grothendieck的回答的是Motive理论.

什么是Motive?

> 我称为 k 上的Motive是指像 k 上代数概形的 ℓ -进上同调群一样的东西，但却认为其与 ℓ 无关，它具有整结构或暂设有 $\mathbb{Q}$ 结构，它由代数链理论导出.
> ——Grothendieck

Grothendieck的想法是，应该存在一个万有上同调理论其取值于由Motive构成的 $\mathbb{Q}$ -范畴 $\mathcal{M}(k)$ ：记 k 上光滑射影簇的范畴为 $\mathcal{V}(k)$

- $\mathcal{M}(k)$ 应该是像有限维 $\mathbb{Q}$ -线性空间范畴那样的范畴（但并不完全相似）. 特别，态射集 Hom 应该是 $\mathbb{Q}$ -线性空间；它应该是一个阿贝尔范畴；它应该是一个 $\mathbb{Q}$ 上的Tannaka范畴.
- 应该存在万有上同调理论 $X \rightsquigarrow hX : \mathcal{V}(k) \mapsto \mathcal{M}(k)$ 特别，每个韦依上同调应该能唯一通过 $X \rightsquigarrow hX$ 分解.



在曲线情形的韦依猜想的证明中，韦依的的主要想法是引入曲线的雅克比并将其用作一阶上同调的抽象替代。这就是说，**本质上曲线的Motive就是曲线的雅克比**. 从这种角度看，Grothendieck引入Motive的一个原因就是**把Motive看成曲线的雅克比的高维类比**.

最后，Deligne关于 *What is a motive?* 的回答：

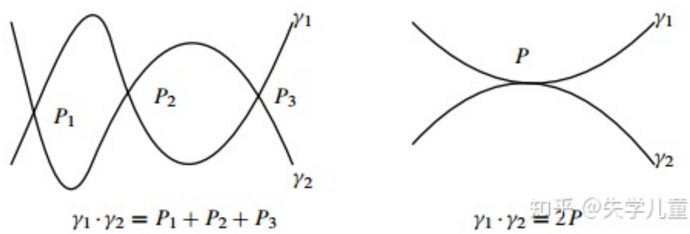
> A surprising fact about algebraic varieties is that they give rise not to one, but to many cohomology theories. Among them the *l*-adic theories, one for each prime *l* different from the characteristic, and in characteristic zero, the algebraic de Rham cohomology. These theories seem to tell the same story, over and over again, each in a different language. The philosophy of motives is that there should exist a universal cohomology theory, with values in a category of motives to be defined, from which all these theories could be derived. For the first cohomology group of a projective non-singular variety, the Picard variety plays the role of a motivic H^1 : the Picard variety is an abelian variety, and from it the H^1 in all available cohomology theories can be derived. In this way, abelian varieties (taken up to isogeny) are a prototype for motives.
>
> **A key idea of Grothendieck is that one should not try to define what a motive is. Rather, one should try to define the category of motives.** It should be an abelian category with finite dimensional rational vector spaces as *Hom* groups. Crucially, it should admit a tensor product, needed to state a Künneth theorem for the universal cohomology theory, with values in the category of motives.
>
> If only the cohomology of projective non-singular varieties is considered, one speaks of pure motives. Grothendieck proposed a definition of a category of pure motives, and showed that if the category defined had a number of properties, modelled on those of Hodge structures, the Weil conjectures would follow.
>
> For the proposed definition to be viable, one needs the existence of “enough”algebraic cycles. On this question almost no progress has been made.

代数闭链

在讨论Motive的构造之前，我们需要解释一下什么是代数闭链.

> **定义**：设 X 是域 k 上的光滑射影簇. X 上的**素链**（prime cycle）是指 X 的一个不可约闭子簇. X 的余维数为 r 的**代数链群** $C^r(X)$ 是指由余维数为 r 的素链生成的自由阿贝尔群. 如果 Z_1 和 Z_2 都是素链，则
> $\operatorname{codim}(Z_1 \cap Z_2) \leq \operatorname{codim}(Z_1) + \operatorname{codim}(Z_2)$
> 当等式成立时，我们称 Z_1 和 Z_2 是**真相交**（properly intersect）；两个代数链 γ_1 和 γ_2 称为**真相交**，如果 γ_1 的每个素链与 γ_2 的每个素链真相交. 在这种情形下，定义它们的**交积**（intersection product） $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ 为一个余维数为 $\operatorname{codim}(Z_1) + \operatorname{codim}(Z_2)$ 的链？.

例如：



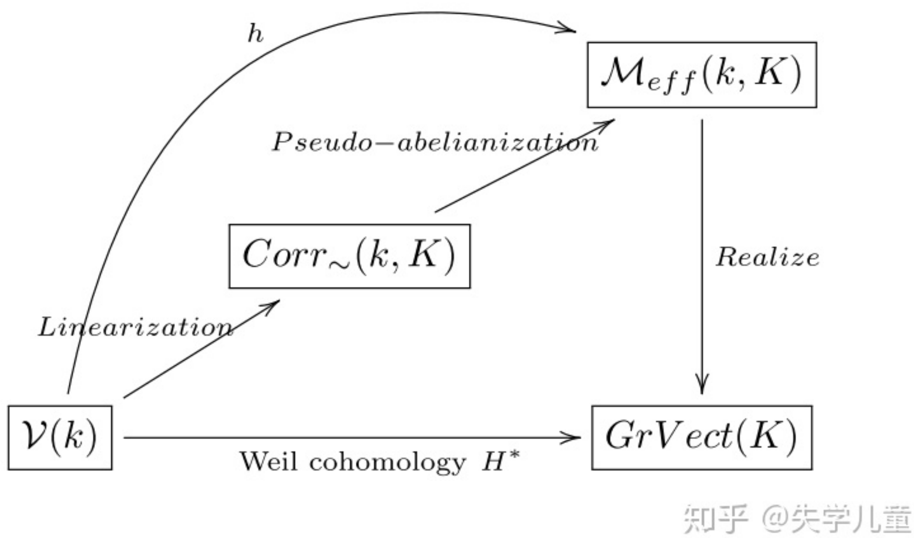
这样我们得到了部分有定义的映射：
$C^r \times C^s(X) \to C^{r+s}(X), \qquad (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cdot \gamma_2$
为了得到在整个集合上有定义的映射，我们对代数链定义如下 4 种等价关系：

1. 称 X 的两个代数链 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^r(X)$ 是**有理等价**（rationally equivalent），如果存在 $X \times \mathbb{P}^1$ 上的代数链 γ 使得 γ_1 是 γ 在 0 上的纤维、 γ_2 是在 1 上的纤维 . 我们以 $C^r_{rat}(X)$ 表示相应的商群. 代数链的有理等价类构成环 $C^*_{rat} := \bigoplus_{r=0}^{\dim X} C^r_{rat}(X)$ ，它称为 X 的**Chow环**.
2. 称 X 的两个代数链 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^r(X)$ 是**数值等价**（numerically equivalent），如果对所有代数链 $\delta \in C^{\dim X - r}(X)$ ，有 $\gamma_1 \cdot \delta = \gamma_2 \cdot \delta$ （如果良定义的话）. 我们以 $C^r_{num}(X)$ 表示相应的商群. 代数链的数值等价类构成环 $C^*_{num} := \bigoplus_{r=0}^{\dim X} C^r_{num}(X)$.
3. 称 X 的两个代数链 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^r(X)$ 是**代数等价**（algebraically equivalent），如果存在一个曲线 T 和 $X \times T$ 上的代数链 γ 使得 $\gamma_{t_1} = \gamma_1, \gamma_{t_2} = \gamma_2$ ，对任意 $t_1, t_2 \in T$. 我们以 $C^r_{alg}(X)$ 表示相应的商群. 代数链的代数等价类构成环 $C^*_{num} := \bigoplus_{r=0}^{\dim X} C^r_{alg}(X)$.
4. 取定一个韦依上同调 H^* . 称 X 的两个代数链 $\gamma_1, \gamma_2 \in C^r(X)$ 关于 H^* 是**同调等价**（homologically equivalent），如果 $cl_X(\gamma_1) = cl_X(\gamma_2)$. 我们以 $C^r_{hom}(X)$ 表示相应的商群. 代数链的有理等价类构成环 $C^*_{num} := \bigoplus_{r=0}^{\dim X} C^r_{hom}(X)$.

它们有如下关系：
有理等价 $\implies$ 代数等价 $\implies$ 同调等价 $\implies$ 数值等价
可以证明交积定义了一个双加性映射：

$C^r_\sim \times C^s_\sim(X) \to C^{r+s}_\sim(X)$
这里 $\sim$ 是有理/代数/同调/数值等价.

Motive的构造



现在我们从 k 上光滑射影簇的范畴为 $\mathcal{V}(k)$ 出发，试图构造Motive范畴 $\mathcal{M}(k)$. 为此，我们试图直接扩大范畴 $\mathcal{V}(k)$ ，我们需要做两件事：

1. 由于代数簇之间的态射很少，我们应该允许“多值映射”，或者更准确地说，是“对应（correspondence）”.
2. 把它改造成“近似的阿贝尔范畴”.

> 定义：从 X 到 Y 的 r 次对应（correspondence）群定义为
> $Corr^r(X,Y) := C^{\dim X + r}(X \times Y).$
> 记 $Corr^r_\sim(X,Y) := Corr^r(X,Y)/\sim,\ Corr^r_\sim(X,Y)_{\mathbb{Q}} := Corr^r_\sim(X,Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ，
> 这里 $\sim$ 是有理/代数/同调/数值等价.

我们可简单地将 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 定义为这样的范畴：对 k 上的光滑射影簇 X 有对象 hX ，而态射定义为
$\mathrm{Hom}(hX, hY) := Corr^0_\sim(X,Y)_{\mathbb{Q}}$
态射的复合为对应的合成. 然而这**不是一个阿贝尔范畴**.

现在我们定义 $\mathcal{M}_\sim(k)$ 定义为这样的范畴：它对象是 $h(X,e)$ ，其中 X 是 k 上的光滑射影簇， e 是环 $Corr^0_\sim(X,X)_{\mathbb{Q}}$ 的幂等元，态射是 $\mathrm{Hom}(h(X,e),h(Y,f)) := f \circ Corr^0_\sim(X,Y)_{\mathbb{Q}} \circ e$

曲线的Motive

标准猜想——Grothendieck的梦想

我们已经看到Motive的构造是很简单的. 实际上，Grothendieck探索了Motive的更多的深层结构。对应于被Motive实现的上同调环的分次结构，Grothendieck推想Motive应该隐含着一种类似的分次结构。为此，他提出了一个著名的猜想：

> 每个Motive都应该有一个直和分解，并且通过这分解的直和项可以实现已给空间的所有阶数的上同调.

七：Deligne对黎曼假设的证明

Grothendieck attempted to deduce the Riemann hypothesis in arbitrary dimensions from the curves case, but no “devissage” worked for him. ´ After he announced the standard conjectures, the conventional wisdom became that, to prove the Riemann hypothesis in dimension > 1, one should prove the standard conjectures. However, Deligne recognized the intractability of the standard conjectures and looked for other approaches. In 1973 he startled the mathematical world by announcing a proof of the Riemann hypothesis for all smooth projective varieties over finite fields. How this came about is best described in the following conversation.

> GOWERS: Another question I had. Given the clearly absolutely remarkable nature of your proof of the last remaining Weil conjecture, it does make one very curious to know what gave you the idea that you had a chance of proving it at all. Given that the proof was very unexpected, it’s hard to understand how you could have known that it was worth working on.
>
> DELIGNE: That’s a nice story. In part because of Serre, and also from listening to lectures of Godement, I had some interest in automorphic forms. Serre understood that the $p^{11/2}$ in the Ramanujan conjecture should have a relation with the Weil conjecture itself. A lot of work had been done by Eichler and Shimura, and by Verdier, and so I understood the connection between the two. Then I read about some work of Rankin, which proved, not the estimate one wanted, but something which was a $1/4$ off — the easy results were $1/2$ off from what one wanted to have. As soon as I saw something like that I knew one had to

> understand what he was doing to see if one could do something similar in other situations. And so I looked at Rankin, and there I saw that he was using a result of Landau — the idea was that when you had a product defining a zeta function you could get information on the local factors out of information on the pole of the zeta function itself. The poles were given in various cases quite easily by Grothendieck's theory. So then it was quite natural to see what one could do with this method of Rankin and Landau using that we had information on the pole. I did not know at first how far I could go. The first case I could handle was a hypersurface of odd dimension in projective space. But that was a completely new case already, so then I had confidence that one could go all the way. It was just a matter of technique.
>
> GOWERS: It is always nice to hear that kind of thing. Certainly, that conveys the idea that there was a certain natural sequence of steps that eventually led to this amazing proof.
>
> DELIGNE: Yes, but in order to be able to see those steps it was crucial that I was not only following lectures in algebraic geometry but some things that looked quite different (it would be less different now) the theory of automorphic forms. It was the discrepancy in what one could do in the two areas that gave the solution to what had to be done.

> things.
>
> DELIGNE (emphatically): Yes.

前面我们已经看到：

设 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 d 维光滑射影簇，则

$$Z_X(T)=\prod_{i=0}^{2d}P_i(T)^{(-1)^{i+1}}=\frac{P_1(T)P_3(T)\cdots P_{2d-1}(T)}{P_0(T)P_2(T)\cdots P_{2d}(T)},$$ 其中 $P_0(T)=1-T$ 和 $P_{2d}(T)=1-q^dT$ ，而对于 $1\le i\le 2d-1$ ， $P_i(T)=\det(1-F_X^*T|H^i(X))$ 。

伟大的Deligne证明了如下结果：

> 对每个 $1\le i\le 2d-1$ ，特征多项式 $P_i(T)=\det(1-F_X^*T|H^i(X))$ 都是整系数的，并且不依赖于 $\ell(\neq p)$ 的选取，并且这些多项式可以写成
> $$P_i(T)=\prod_{j=1}^{b_i}(1-\alpha_{ij}T)\ ,\quad \alpha_{ij}\in\overline{\mathbb{Z}}\ .$$
> 并且对所有的 i,j 有 $|\alpha_{ij}|=q^{i/2}$ 。

这个结果可由如下结论推知：

> 对于每个 i 和每个 $\ell\neq p$ ， $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ 的自同态 F_X^* 的所有特征值都是代数数，并且它们在复数域中的所有共轭元 α 都具有绝对值 $|\alpha|=q^{i/2}$ 。

参考文献：

1. Milne, J.: Lectures on Etale Cohomology.
2. Milne, J.: The Riemann Hypothesis over Finite Fields.
3. Milne, J.: Motives——Grothendieck's Dream.
4. Deligne, P.: La conjecture de Weil, I, Pub. Math. I.H.E.S 43, 273-307(1974).
5. Poonen, B.: Rational points on varieties.
6. Jacob P. Murre, Jan Nagel, Chris A. M.Peters: Lectures on the Theory of Pure Motives.
7. Hartshorne, R.: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer, 1990.
8. 徐克舰: 格罗登迪克的Motive与塞尚的母题.
9. Weil猜想漫谈
10. Trying to understand Deligne's proof of the Weil conjectures

编辑于 2018-05-31

自然科学 数学

文章被以下专栏收录

数学小白的胡言乱语
几乎一无所知